

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
для виконання лабораторних робіт  
з навчальної дисципліни

**«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

II частина

**Імпульсні та нелінійні системи автоматичного регулювання**

*(для студентів усіх форм навчання і слухачів другої вищої освіти  
за спеціальністю*

*141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2017**

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування» II частина «Імпульсні та нелінійні системи автоматичного регулювання» (для студентів усіх форм навчання і слухачів другої вищої освіти за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : Я. В. Щербак, К. Я. Івакіна. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 49 с.

Укладачі : д-р техн. наук, проф. Я. В. Щербак,  
канд. техн. наук, ст. викл. К. Я. Івакіна

Рецензент

Ю. М. Кутовий, професор кафедри «Автоматизовані електромеханічні системи» НТУ «ХПІ»

*Рекомендовано кафедрою електричного транспорту, протокол № 12  
від 18.04.2017 р.*

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1	
ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕМЕНТА.....	6
1.1 Розомкнута лінійна імпульсна система і методи її дослідження.....	6
1.2 Попереднє завдання.....	13
1.3 Робоче завдання.....	13
1.4 Виконання робочого завдання.....	14
1.5 Обробка результатів досліджень.....	14
2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2	
ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	16
2.1 Замкнута імпульсна лінійна система регулювання і методи її дослідження.....	16
2.2 Попереднє завдання.....	26
2.3 Робоче завдання.....	26
2.4 Виконання робочого завдання.....	28
2.5 Обробка результатів досліджень.....	28
3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3	
ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	29
3.1 Поняття про нелінійні системи і методи їх дослідження.....	29
3.2 Попереднє завдання.....	40
3.3 Робоче завдання.....	41
3.4 Виконання робочого завдання.....	42
3.5 Обробка результатів досліджень.....	42
СПИСОК ДЖЕРЕЛ.....	44
ДОДАТОК А.....	45

## ВСТУП

Сучасний технічний рівень в промисловості і транспорті характеризується вдосконаленням застарілих технологічних процесів і повсюдним впровадженням нових високоефективних технологій. Це завдання припускає широке впровадження автоматики і засобів автоматизації, що базуються на новій елементній базі.

Особливістю автоматики як наукової дисципліни є спільність математичного опису і практичне застосування закономірностей в системах різної фізичної природи – механічних, пневматичних, гідравлічних, електричних, електронних і так далі. В результаті цього знання основ теорії автоматичного керування необхідне інженерно-технічним працівникам переважної більшості спеціальностей.

Робота будь-яких автоматичних систем, від простих до найскладніших, базується на одних і тих же основних принципах. Чітке розуміння їх суті і знання основ теорії автоматичного керування є необхідною умовою для правильного розуміння принципу дії, особливостей улаштування і експлуатації будь-яких автоматичних пристроїв. Даний підхід покладений в основу побудови лабораторного практикуму.

Друга частина методичних вказівок з курсу «Теорія автоматичного керування» включає дослідження імпульсних і нелінійних безперервних систем. Кожна з лабораторних робіт містить теоретичний матеріал, необхідний для розуміння завдання дослідження, шляхів її рішення і містить формули для виконання попереднього завдання і оформлень результатів роботи.

Роботи побудовані таким чином і пропонується такий порядок їх виконання, щоб результати попередньої можна було використовувати для виконання наступної. Наприклад, частотні характеристики окремих ланок і їх з'єднань, отримані в результаті виконання другої роботи, можуть бути використані для визначення запасів стійкості системи (третя робота) і для корекції системи (четверта робота).

Лабораторні роботи виконуються на імітаційних моделях. Передавальні функції досліджуваних ланок відповідають реальним об'єктам. Так, наприклад, аперіодичній ланці першого порядку відповідає обмотка збудження двигуна постійного струму, а коливальній ланці – згладжуючий  $LC$ -фільтр з навантаженням на виході.

Підготовку до лабораторної роботи рекомендується виконувати в наступному порядку:

- вивчити літературу з даного розділу;
- виконати попереднє розрахункове завдання, користуючись методичними вказівками;
- вивчити робоче завдання і методичні вказівки до його виконання.

Попереднє розрахункове завдання виконується в окремому зошиті, який відіграє роль лабораторного журналу протягом всього лабораторного практикуму, куди заносяться у вигляді таблиць результати експериментальних досліджень. Графіки і характеристики будуються на міліметрівці і вкладаються в журнал. Кожен студент веде журнал індивідуально і представляє викладачеві у вигляді звіту про виконану роботу при захисті.

# 1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

## ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕМЕНТА

### 1.1 Розімкнута лінійна імпульсна система і методи її дослідження

Спільним для імпульсних і цифрових систем є наявність ефекту квантування сигналів за часом. Імпульсні і цифрові системи регулювання відрізняються від безперервних систем наявністю в каналі управління імпульсного елемента (ІЕ), що перетворює безперервну величину в послідовність імпульсів тієї або іншої форми (рис. 1.1, а).

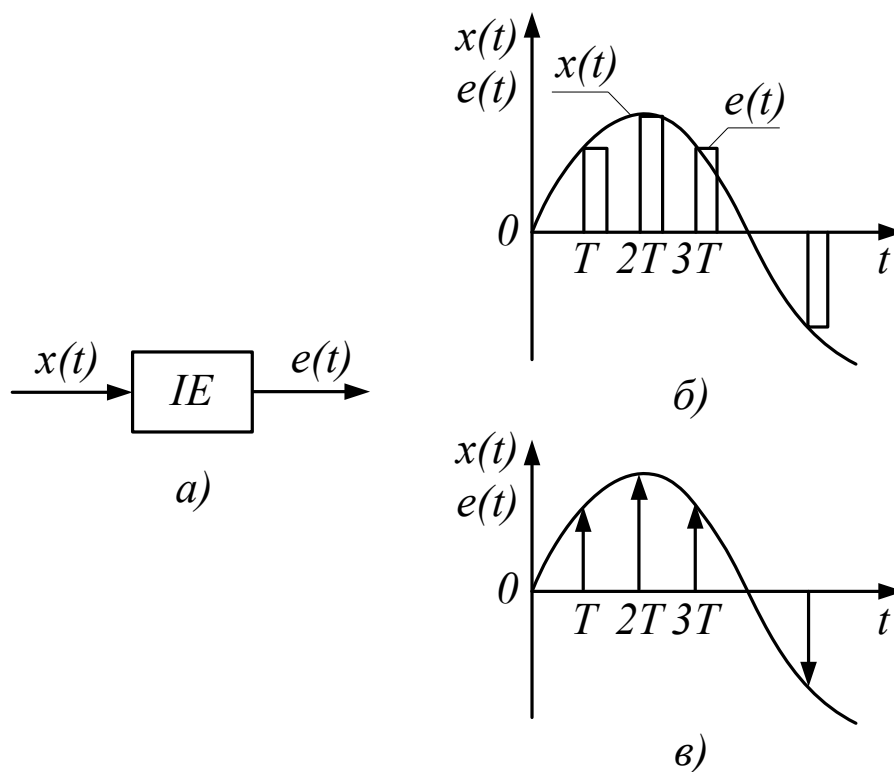


Рисунок 1.1 – Імпульсний елемент

Форма імпульсів може бути найрізноманітнішою і характеризується функцією форми  $w_\phi(t)$ . Функція форми дозволяє просто записати аналітичний вираз для вихідної величини імпульсного елемента. Так, при довільному входньому сигналі  $x(t)$  вихідний сигнал імпульсного елемента для моментів часу  $\gamma \cdot T_0 \leq t < (n+1) \cdot T_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , описується рівнянням (рис. 1.1, б)

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] \cdot w_\phi[t - nT_0]. \quad (1.1)$$

Тут  $T_0$  – період повторення імпульсного елементу,  $\gamma \cdot T_0$  – тривалість імпульсів ( $0 < \gamma \leq 1$ ).

З приведеного співвідношення виходить, що в його правій частині фігурує не функція  $x(t)$ , а її дискретні значення –  $x[nT_0]$ . Це свідчить про те, що імпульсний елемент реагує не на весь вхідний сигнал, а тільки на його значення в дискретні моменти часу  $nT_0$ . Інформація про поведінку сигналу  $x(t)$  в проміжках між моментами часу  $t = nT_0$  після проходження через імпульсний елемент втрачається. З цього виходить, що вихідна величина  $x(t)$  імпульсного елементу буде однією і тією ж для різних сигналів  $x(t)$ , якщо значення цих сигналів в моменти часу  $t = nT_0$  однакові.

Імпульсний елемент, у якого функція форми представляє одиничну  $\delta$ -функцію, називають ідеальним. Вихідна величина ідеального імпульсного елементу є послідовністю модульованих за «площею»  $\delta$ -функцій (рис. 1.1, в)

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] \cdot \delta[t - nT_0]. \quad (1.2)$$

Реального фізичного сенсу ідеальний імпульсний елемент не має і є математичною абстракцією. Представивши

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[t - nT_0], \quad (1.3)$$

отримаємо вираз для вихідного сигналу імпульсного елементу, що здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію

$$e^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t). \quad (1.4)$$

Основними параметрами імпульсного елементу є коефіцієнт передачі  $K_I$ , період повторення  $T$ , тривалість  $\gamma \cdot T$  і форма вихідних імпульсів. В залежності від вигляду і роду імпульсної модуляції імпульсні елементи підрозділяються на амплітудні, широтні і тимчасові. Залежність величини модульованого параметра вихідної послідовності від відповідних дискретних значень вхідної величини називається характеристикою імпульсного елементу.

Ця характеристика може бути лінійною і нелінійною. Крутизна лінійної характеристики дорівнює коефіцієнту передачі імпульсного елементу

$$K_s = \frac{e[nT]}{x[nT]}, \quad (1.5)$$

де  $x[nT]$  – значення вхідної величини в дискретний момент часу;  
 $e[nT]$  – відповідна йому амплітуда імпульсу.

Середнє значення напруги на виході імпульсного елементу дорівнює

$$U_{IE} = \frac{U_I \cdot t_I}{T}, \quad (1.6)$$

де  $U_I$  – амплітуда імпульсу;  
 $t_I$  – тривалість імпульсу;  
 $T$  – період проходження імпульсів.

Крутизна характеристики широтного імпульсного елементу

$$\lambda = \frac{\gamma \cdot T}{\{x[nT]\}}. \quad (1.7)$$

З розглянутого виходить, що амплітудний імпульсний елемент володіє постійними параметрами, а широтний – змінними параметрами.

Реальний імпульсний елемент в залежності від параметрів вихідного сигналу здійснює амплітудну імпульсну модуляцію першого або другого роду. Якщо вихідний сигнал імпульсного елементу визначається вхідним в тактові моменти часу і не змінюється протягом існування імпульсу, то здійснюється амплітудно-імпульсна модуляція першого роду. Коли вихідний сигнал імпульсного елементу змінюється у відповідності з поточним значенням модулюючої функції, то здійснюється амплітудно-імпульсна модуляція другого роду.

Реальний імпульсний елемент, що здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію першого роду, може бути замінений еквівалентною йому в сенсі проходження сигналу структурною схемою, що складається з послідовного



з'єднання ідеального імпульсного і формуючого елементів. В якості формуючого елементу застосовують динамічну ланку з передавальною функцією

$$W_{\phi}(p) = L\{w_{\phi}(t)\} = \int_0^{\infty} w_{\phi}(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (1.8)$$

де  $w_{\phi}(t)$  в даному випадку представляє функцію ваги формуючої ланки.

Структурна схема системи автоматичного регулювання, що містить такий імпульсний елемент, зображена на рисунк 1.2, де  $W_{\phi}(p)$  – передавальна функція безперервної частини. Формуючий елемент і безперервна частина спільно утворюють так звану приведену безперервну частину.

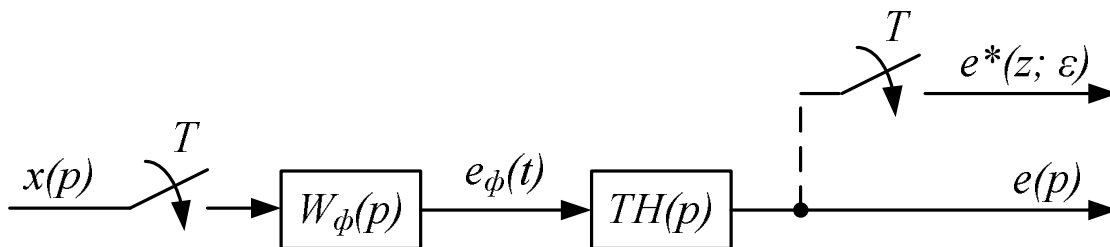


Рисунок 1.2 – Узагальнена структурна схема системи автоматичного регулювання

Коли в системі здійснюється амплітудно-імпульсна модуляція першого роду (рис. 1.1, б), передавальна функція формуючого елементу має вигляд

$$W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma \cdot pT}}{p}. \quad (1.9)$$

Дана передавальна функція формуючого елементу справедлива і для широтно-імпульсної модуляції другого роду, коли тривалість реального імпульсу мала.

Передавальна функція формуючого елементу з фіксацією на період одержується при  $\gamma = 1$ .

$$W_{\phi}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (1.10)$$

Дану динамічну ланку називають екстраполятором нульового порядку.

Реакцію приведеної безперервної частини  $H(p)$  на вихідний сигнал імпульсного елементу визначають, скориставшись структурною схемою розімкненою систем регулювання, зображеною на рисунку 1.2, і застосувавши математичний апарат  $Z$ -перетворення.

Для випадку ідеального імпульсного елементу і коли  $W_{\phi}(p) = 1$ , зв'язок між вхідним і вихідним сигналами має наступний вигляд:

$$e(z, \varepsilon) = Tx^*(z) \cdot H^*(z, \varepsilon), \quad (1.11)$$

де  $x^*(z)$  представляє  $Z$ -перетворення вхідного сигналу імпульсного елементу;

$H^*(z, \varepsilon)$  – модифіковане  $Z$ -перетворення передавальної функції приведеної безперервної частини.

Розглянемо процес в системі для випадку, коли вхідний сигнал  $x(p) = 1/p$ , тобто являє собою одиничну ступінчасту функцію. У цьому випадку при  $\varepsilon = 0$  отримуємо правосторонні значення  $(nT +)$  реакції безперервної частини системи на вихідний сигнал  $\delta_T(t)$  імпульсного елементу. Коли приведена безперервна частина системи представлена у вигляді аперіодичної ланки з передавальною функцією  $H(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$ , вихідний сигнал дорівнює

$$e^*(z, 0) = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{z}{z - 1} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}}. \quad (1.12)$$

Коли  $\varepsilon = 1$ , отримуємо формулу для реакції ланки  $H(p)$  на послідовність  $\delta(t)$

$$e^*(z,1) = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z \cdot e^{-\frac{T}{T_1}}}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}}, \quad (1.13)$$

з якої слідує, що

$$e^*(z,1) = e^*(z,0) \cdot e^{-\frac{T}{T_1}}. \quad (1.14)$$

Значення реакції безперервної частини системи  $e[nT]$  може бути отримане у вигляді коефіцієнтів при  $z^{-n}$  розкладання в степеневий ряд функцій  $e^*(z,0)$  і  $e^*(z,1)$ :

$$e^*(z) = C_0 + C_1 \cdot z^{-1} + C_2 \cdot z^{-2} + C_3 \cdot z^{-3} + \dots + C_n \cdot z^{-n}. \quad (1.15)$$

Коефіцієнти  $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  чисельно дорівнюють при  $\varepsilon = 0$  правостороннім значенням реакції ланки  $H(p)$  в тактові моменти часу  $nT$ , а лівостороннім – здвинутим на один такт вправо значенням при  $\varepsilon = 1$ . Значення коефіцієнтів степеневого ряду отримують шляхом простого ділення чисельника функції  $e^*(z,0)$  або  $e^*(z,1)$  на її знаменник.

Закон зміни реакції для розглянутої ланки  $H(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$  зображений на рисунку 1.3.

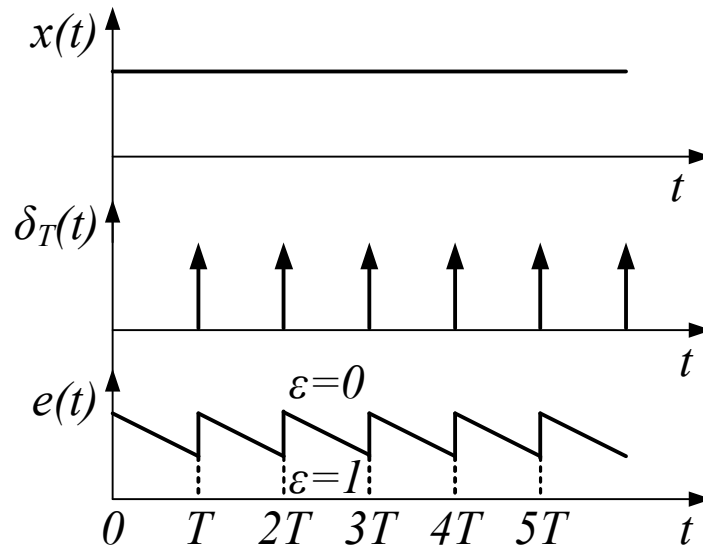


Рисунок 1.3 – Реакція САР з ідеальним імпульсним елементом на вхідне діяння

Початкове і кінцеве значення реакції безперервної приведенної частини на вихідний сигнал імпульсного елемента можна отримати на підставі відповідних теорем  $Z$ -перетворення:

$$\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} e^*(z); \quad (1.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot e^*(z). \quad (1.17)$$

Реакція приведенної безперервної частини на вихідний сигнал реального імпульсного елемента при  $W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-\gamma T p}}{p}$  для випадку, коли  $\varepsilon \ll 1$ , може бути визначена згідно формули

$$e^*(z, \varepsilon) = \gamma \cdot T x^*(z) \cdot H^*(z, \varepsilon). \quad (1.18)$$

У випадку, коли  $\varepsilon = 0$ , одержуємо правосторонні значення реакції в моменти часу  $(n + \gamma) \cdot T$ . При  $\varepsilon = 1$ , як і у випадку ідеального елемента, одержуємо лівосторонні значення реакції в кінці такту. Закон зміни реакції

для розглянутої в якості прикладу ланки з передавальною функцією

$$H(p) = \frac{1}{T_1 p + 1} \text{ зображений на рисунку 1.4.}$$

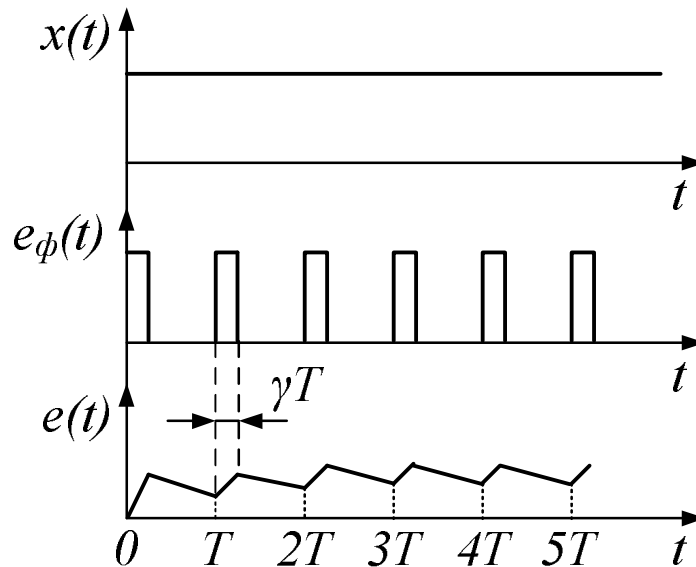


Рисунок 1.4 – Реакція САР з реальним імпульсним елементом на вхідне діяння

## 1.2 Попереднє завдання

1.2.1 Намалювати структурну схему розімкненої імпульсної системи.

1.2.2 Отримати аналітичний вираз для реакції безперервної частини з передавальною функцією вказаного варіанту на вихідні сигнали ідеального і реального імпульсного елемента  $T = \frac{1}{f_{I.E.}}$ . У лабораторному макеті частота

модуляції імпульсного елемента  $f_{I.E.} = 400$  Гц.

1.2.3 Побудувати графіки тимчасових залежностей вихідних сигналів безперервної частини.

## 1.3 Робоче завдання

1.3.1 Виміряти параметри вихідного сигналу реального імпульсного елемента при вхідному  $x(t) = 1(t)$ .

1.3.2 Дослідити реакцію безперервної частини імпульсної системи на вихідний сигнал реального імпульсного елемента.

1.3.3 Дослідити вихідний сигнал імпульсного елементу при вхідному синусоїдальному сигналі.

1.3.4 Дослідити вихідний сигнал формуючого елементу і за його виглядом записати передавальну функцію.

1.3.5 Обчислити коефіцієнт передачі імпульсного елементу при амплітудній модуляції.

## **1.4 Виконання робочого завдання**

1.4.1 Контроль форми сигналів і вимірювання їх параметрів в даній роботі здійснюється за допомогою осцилографа *Scope*.

1.4.2 Подати на вхід імпульсного елементу *Impuls Element* вихідний сигнал елемента *Constant*.

1.4.3 Вихідний сигнал імпульсного елементу контролювати першим входом осцилографа *Scope1*.

1.4.4 Вихідні сигнали динамічних ланок контролювати другим та третім входами осцилографа *Scope1*. Результати вимірювань занести в робочий журнал.

1.4.5 Підключити до входу імпульсного елементу вихід генератора синусоїдальних коливань *Signal Generator*, встановивши на його виході сигнал мінімальної частоти і амплітудою  $U = 10$  В.

1.4.6 Зняти осцилограму вихідного сигналу на виході імпульсного елементу.

1.4.7 Зняти осцилограму вихідного сигналу формуючого елементу *Fiksator*.

## **1.5 Обробка результатів досліджень**

1.5.1 Замалювати осцилограми досліджуваних сигналів.

1.5.2 За осцилограмою вихідного сигналу формуючого елементу записати його передавальну функцію.

1.5.3 За осцилограмою вихідного сигналу імпульсного елементу при гармонійному вхідному сигналі визначити рід амплітудно-імпульсної модуляції.

1.5.4 Порівняти результати теоретичних і експериментальних досліджень реакції лінійних ланок на вихідний сигнал реального імпульсного елементу.

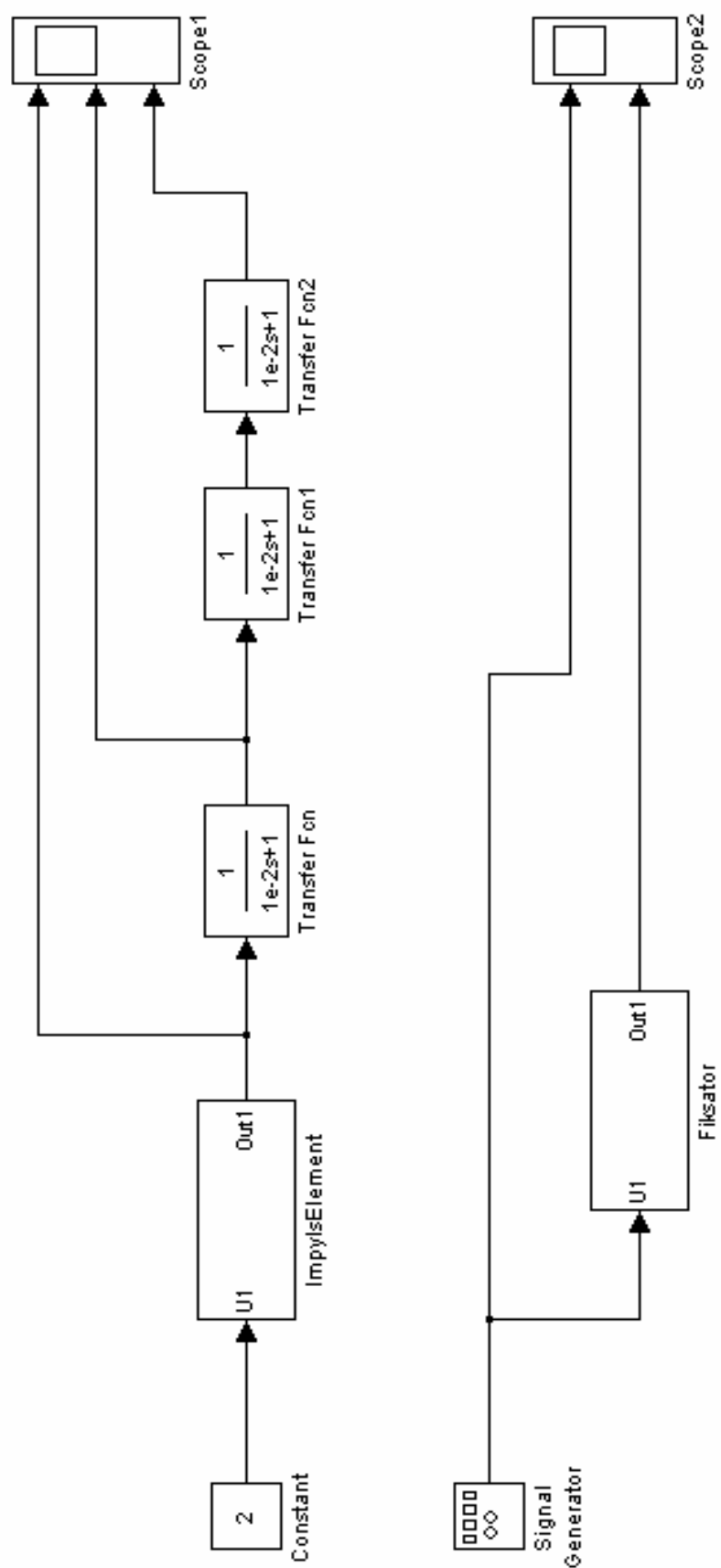


Рисунок 1.5 – Панель дослідження імпульсного елементу

## 2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

### ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

#### 2.1 Замкнута імпульсна лінійна система регулювання і методи її дослідження

Структурна схема замкнутої імпульсної системи автоматичного регулювання зображена на рисунку 2.1.

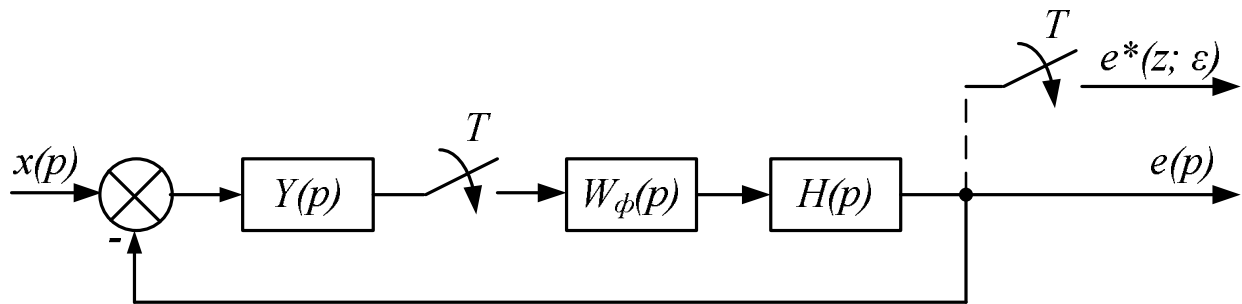


Рисунок 2.1 – Структурна схема замкнутої імпульсної САР

До даної структурної схеми може бути приведене велике число конкретних систем імпульсного регулювання. Залежно від виду передавальної функції формуючої ланки можемо отримувати систему з ідеальними, коли  $W_\phi(p) = 1$  і реальними імпульсними елементами. Наприклад, при аналізі динамічних процесів автоматичного регулювання струму і напруги навантаження керованого випрямляча або широтного перетворювача користуються поняттям ідеального імпульсного елемента. В імпульсній системі регулювання температури використовується елемент з прямокутними імпульсами, передавальна функція формуючої ланки якого  $W_\phi(p) = \frac{1 - e^{-\gamma \cdot T}}{p}$ . Математичний опис системи з реальним імпульсним елементом дещо складніший в порівнянні з ідеальним. Коли реальний імпульсний елемент формує прямокутні імпульси малої тривалості в порівнянні з періодом дискретності, тобто  $\gamma \ll 1$ , можна приблизно прийняти  $e^{-\gamma \cdot pT} \approx 1 - \gamma \cdot pT$ . Дане допущення дозволяє з достатньо високою точністю аналізувати системи, що містять реальний імпульсний елемент,



користуючись поняттям ідеального імпульсного елементу. В результаті прийнятого допущення і виконаних на його підставі перетворень структурна схема, зображена на рисунку 6.1, трансформується до вигляду, зображеного на рисунку 2.2. Лінійні ланки з передавальними функціями  $Y(p)$  і  $H(p)$  представляють безперервну частину системи. Залежно від призначення імпульсної системи автоматичного регулювання передавальні функції ланок безперервної частини системи можуть бути самими різними.

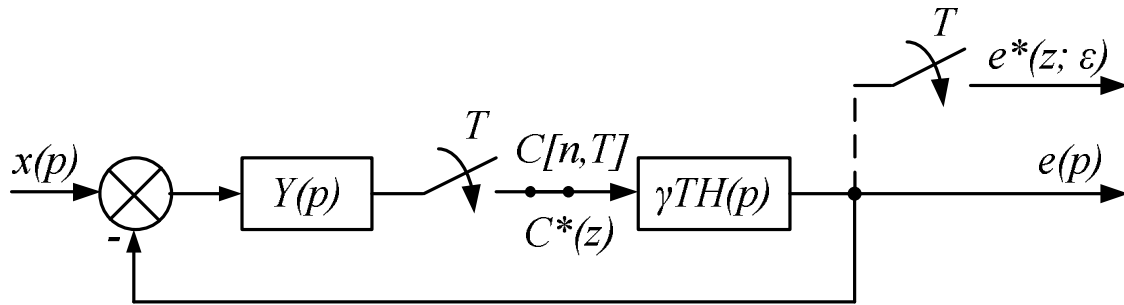


Рисунок 2.2 – Перетворена структурна схема імпульсної САР

В імпульсній системі безперервний сигнал ланки  $Y(p)$  квантується в тактові моменти часу  $T$  імпульсним елементом. Вихідний сигнал  $C[nT]$  імпульсного елементу є послідовністю одиничних імпульсів, промодульованих за амплітудою вихідним сигналом ланки  $Y(p)$ .

$$C[nT] = \sum_{n=0}^{\infty} Y(nT) \cdot \delta[t - nT]. \quad (2.1)$$

Внаслідок того, що ланка  $H(p)$  володіє фільтруючими властивостями, її реакція  $e(p)$  на послідовність одиничних імпульсів імпульсного елементу є безперервною функцією часу. Часто при аналізі динамічних процесів в імпульсній системі автоматичного регулювання досить мати інформацію про поведінку вихідної координати в тактові моменти часу. У такому разі до виходу системи підключається фіктивний імпульсний елемент, синхронізований з основним. У наведених на рисунках 6.1. та 6.2. структурних схемах підключення фіктивних імпульсних елементів показане пунктирними лініями. Вихідний сигнал фіктивного імпульсного елементу

представляє послідовність одиничних імпульсів, величини яких дорівнюють значенням вихідного сигналу системи в тактові моменти часу.

По аналогії з безперервною лінійною системою регулювання імпульсна система може описуватися передавальною функцією, яка пов'язує  $Z$ -перетворення вихідної величини фіктивного імпульсного елемента з  $Z$ -перетворенням вхідної величини системи

$$G^*(z) = \frac{e^*(z)}{x^*(z)}. \quad (2.2)$$

Даній передавальній функції відповідає структурна схема імпульсної системи регулювання, яка не містить безпосередньо перед імпульсним елементом динамічних ланок. Для структурних схем, зображених на рисунках 6.1. та 6.2, це відповідає випадку, коли  $Y(p) = K$ . Коли наведена умова не виконується, тобто перед імпульсним елементом в системі регулювання міститься динамічна ланка, то передавальна функція в явному вигляді для такої системи відсутня. У такому разі при аналізі такої імпульсної системи автоматичного регулювання користуються аналітичною залежністю, що визначає зв'язок між вхідним і вихідним сигналами.

Для отримання передавальної функції або залежності між вхідним і вихідним сигналами застосовують різні прийоми. Один з них полягає в наступному. Виходячи з того, що аналоговий сигнал імпульсним елементом перетворюється в амплітудно-модульовану послідовність одиничних імпульсів, що піддаються  $Z$ -перетворенню, можемо записати (рис. 6.2), що

$$e^*(z) = \gamma \cdot T \cdot H^*(z) \cdot C^*(z). \quad (2.3)$$

У свою чергу для вихідного сигналу імпульсного елемента одержимо

$$C^*(z) = x \cdot Y^*(z) - C^*(z) \cdot \gamma \cdot T \cdot H \cdot Y^*(z), \quad (2.4)$$

звідки

$$C^*(z) = \frac{x \cdot Y^*(z)}{1 + \gamma \cdot T \cdot H \cdot Y^*(z)}. \quad (2.5)$$

Підставивши формулу для вихідного сигналу імпульсного елементу у формулу для вихідного сигналу системи, отримаємо

$$e^*(z) = \frac{\gamma \cdot T \cdot x \cdot Y^*(z) \cdot H^*(z)}{1 + \gamma \cdot T \cdot H \cdot Y^*(z)}, \quad (2.6)$$

де

$$x \cdot Y^*(z) = Z(x(p) \cdot Y(p)), \quad (2.7)$$

а

$$H \cdot Y^*(z) = Z(H(p) \cdot Y(p)). \quad (2.8)$$

Отриманий аналітичний вираз визначає зв'язок між вхідним і вихідним сигналами досліджуваної системи. З приведенного виразу виходить, що в даній системі регулювання імпульсний елемент здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію реакції ланки  $Y(p)$  на вхідне діяння  $x(p)$ . А оскільки

$$x \cdot Y^*(z) = x^*(p) \cdot Y^*(p), \quad (2.9)$$

то для даної структурної схеми не можна отримати вираз для передавальної функції.

Динамічні процеси, що протікають в імпульсній системі, так само, як і в безперервній системі, визначаються властивостями коренів характеристичного рівняння. Тому аналітичний вираз зв'язку між вхідним і вихідним сигналами дає повну інформацію про досліджувану систему.

За аналогією з безперервними системами вираз для реакції імпульсної системи регулювання на вхідний сигнал  $x(t)$  може бути представлений у вигляді суми перехідної і сталої складових.

$$e[nT] = e_n(nT) + e_{cm}[nT]. \quad (2.10)$$

Система буде стійкою, якщо перехідна складова має затухаючий в часі характер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_i(nT) = 0. \quad (2.11)$$

Дана умова виконується, коли корені характеристичного рівняння лежать в лівій напівплощині коренів в  $p$ -області. Границею стійкості є уявна вісь (рис. 6.3, а).

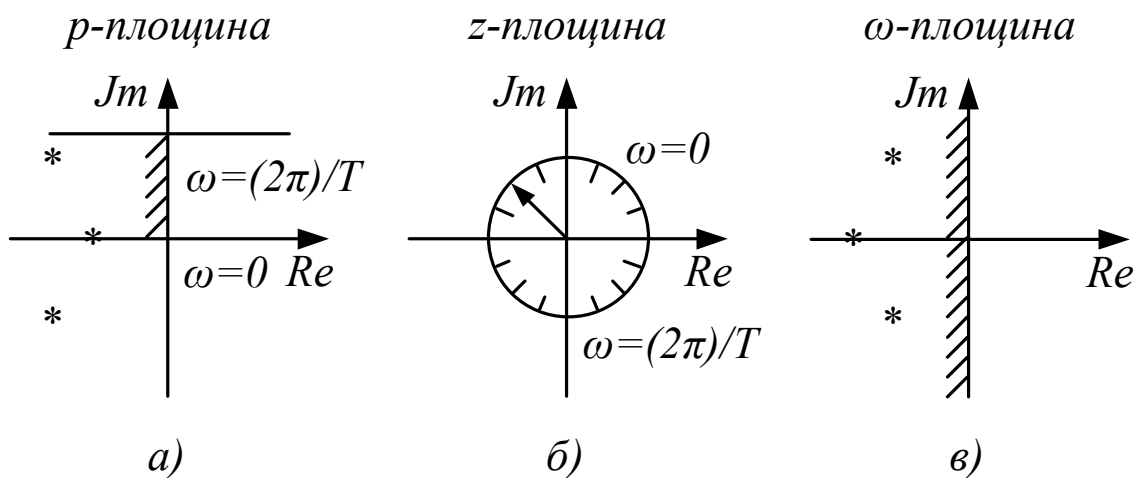


Рисунок 2.3 – Визначення границі стійкості імпульсної САР

Для побудови області стійкості в  $Z$ -площині відобразимо уявну вісь  $p$ -площини на  $Z$ -площину. Для цього у виразі  $z = e^{pT}$  замінимо  $p$  на  $j\omega$ , внаслідок чого отримаємо

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T. \quad (2.12)$$

При зміні частоти  $\omega$  від 0 до  $\frac{2 \cdot \pi}{T}$  на  $Z$ -площині вийде коло одиничного радіуса, що обмежує область стійкості (рис. 6.3, б). Умовою стійкості буде знаходження коренів характеристичного рівняння

$$a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + a_2 \cdot z^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.13)$$

імпульсної системи усередині цього кола. Отже, корені повинні бути обмежені за модулем  $|z_i| < 1$ . Якщо в характеристичному рівнянні виконати підстановку  $z = \frac{1+w}{1-w}$ , то коло одиничного радіусу в площині  $Z$  перетвориться в уявну вісь на площині  $w$ . При цьому внутрішній частині кола  $Z$ -площини відповідає ліва напівплощина  $w$  (рис. 6.3, в).

В результаті підстановки характеристичне рівняння приймає вигляд

$$a_0 \cdot \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1 \cdot \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + a_2 \cdot \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.14)$$

або

$$a_0 \cdot (1+w)^n + a_1 \cdot (1+w)^{n-1} \cdot (1-w)^n + \dots + a_n \cdot (1-w)^n = 0, \quad (2.15)$$

або

$$a'_0 \cdot w^n + a'_1 \cdot w^{n-1} + \dots + a'_n = 0, \quad (2.16)$$

де  $a'_i$  – нові коефіцієнти рівняння.

Для перетвореного характеристичного рівняння можна використовувати критерій Гурвиця. Так, для характеристичного рівняння другого порядку  $a_0 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_2 = 0$  умови стійкості записуються таким чином:

$$a_0 + a_1 + a_2 > 0; \quad a_0 - a_2 > 0; \quad a_0 - a_1 + a_2 > 0. \quad (2.17)$$

Скориставшись приведеною методикою, визначимо умови стійкості для системи, зображеної на рисунку 2.2, коли передавальні функції вхідних в неї ланок мають вигляд

$$Y(p) = K \cdot \frac{T_6 p + 1}{T_7 p}; \quad (2.18)$$

$$H(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^2}. \quad (2.19)$$

Для цього випадку передавальна функція приведеної безперервної частини системи

$$W(p) = Y(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p), \quad (2.20)$$

а характеристичне рівняння має вигляд

$$1 + \gamma \cdot T \cdot W^*(z) = 0. \quad (2.21)$$

Виконавши  $Z$ -перетворення передавальної функції приведеної безперервної частини системи і підставивши в характеристичне рівняння, отримаємо

$$1 + \gamma \cdot K \cdot \frac{T}{T_7} \cdot \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{\left(1 - \frac{T_6}{T_1}\right) \cdot e^{-\frac{T}{T_1}}}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} \right] = 0. \quad (2.22)$$

Перетворене до канонічної форми характеристичне рівняння має вигляд

$$z^2 + z \cdot a_1 + a_2 = 0, \quad (2.23)$$

де

$$a_1 = \gamma \cdot K \cdot \frac{T}{T_7} \cdot \left[ 1 - \left(1 - \frac{T_6}{T_1}\right) \cdot e^{-\frac{T}{T_1}} \right] - 1 - e^{-\frac{T}{T_1}}; \quad (2.24)$$

$$a_2 = e^{-\frac{T}{T_1}} \cdot \left( 1 - \gamma \cdot K \cdot \frac{T}{T_7} \cdot \frac{T_6}{T_1} \right). \quad (2.25)$$

З отриманих коефіцієнтів характеристичних рівнянь складемо систему нерівностей, що визначають умови стійкості системи. Вирішення рівнянь показує, що перші дві умови виконуються для будь-яких значень параметрів системи регулювання, а з третього витікає умова її стійкості

$$K < 2 \cdot \frac{T_7}{\gamma \cdot T} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}} + 2 \cdot \frac{T_6}{T_1} \cdot e^{-\frac{T}{T_1}}} \quad (2.26)$$

Динамічні властивості імпульсних систем (як замкнутих, так і розімкнених) можна характеризувати за допомогою перехідної функції  $h(t)$  і функцією ваги  $w(t)$ , які мають той же сенс, що і у разі безперервних систем. Найпростіше можна визначити їх дискретні значення  $h[nT]$  і  $w[nT]$ , скориставшись формулою звернення

$$h[nT] = \sum_{i=1}^n \text{Res}[H^*(z) \cdot z^{n-1}], \quad (2.27)$$

де  $H^*(z)$  – зображення перехідної функції.

Вирахування в полюсі першого порядку

$$\text{Res}[H^*(z) \cdot z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{N^*(z) \cdot z^{n-1}}{M^*(z)} \cdot z^{n-1}, \quad (2.28)$$

де  $z_i$  – корінь порядку  $m$ .

У разі полюса порядку  $m$

$$\text{Res}[H^*(z) \cdot z^{n-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{a^{m-1}}{a_z^{m-1}} \cdot [H^*(z) \cdot (z - z_i)^m]. \quad (2.29)$$

Перехідна характеристика  $h[nT]$  і функція ваги  $w[nT]$  складаються з суми сталих і перехідних складових.

Коли корені характеристичного рівняння  $M^*(z)=0$  обмежені за модулем  $|z_i|<1$ , тобто імпульсна система стійка, перехідна складова в часі затухає. Швидкість її затухання залежить від виду коренів характеристичного рівняння.

Якщо сумістити корені характеристичного рівняння з початком координат  $Z$ -площини, що досягається вибором параметрів системи, в результаті якого  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , то перехідна складова затухає за кінцеве число періодів  $T$  імпульсного елементу. При цьому число періодів перехідного процесу дорівнює порядку характеристичного рівняння. Такий перехідний процес називається процесом кінцевої тривалості ПКТ, а умови його отримання – умовами процесу кінцевої тривалості.

Подібне явище не зустрічається в безперервних системах автоматичного регулювання, в яких перехідні процеси затухають лише при  $t \rightarrow \infty$ .

Виконання умов кінцевої тривалості робить імпульсну систему оптимальною за швидкодією, оскільки в будь-якому іншому випадку тривалість перехідних процесів буде більша.

Визначимо умови кінцевої тривалості для приведеної на рисунку 2.3 імпульсної системи автоматичного регулювання з передавальними функціями ланок

$$Y(p) = K \cdot \frac{T_6 p + 1}{T_7 p}; \quad H(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}.$$

В даному випадку передавальна функція приведеної безперервної частини системи матиме різницю порядків поліномів чисельника і знаменника рівну одиниці. Це говорить про те, що реакція приведеної безперервної частини на вихідний сигнал імпульсного елементу має розриви першого роду. Розриви в реакції в часі співпадають з тактовими моментами імпульсного елементу. Інформацію для імпульсного елементу про динамічні процеси в системі несуть лівосторонні значення реакції. Тому для модуляції імпульсним елементом лівосторонніх значень реакції безперервної частини перетворимо характеристичне рівняння до вигляду

$$1 + z^{-1} \cdot \gamma \cdot T \cdot Y \cdot H^*(z, 1) = 0. \quad (2.30)$$



Виконавши модифіковане  $Z$ -перетворення при  $\varepsilon = 1$  передавальної функції приведеної безперервної частини системи, підставимо в характеристичне рівняння. Прирівнявши нулю коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$  характеристичного рівняння, отримаємо умову процесу кінцевої тривалості

$$T_6 = T_1 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_1}} \right); \quad (2.31)$$

$$K = \frac{T_7}{\gamma \cdot T \cdot \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_1}} \right)}. \quad (2.32)$$

Для перевірки достовірності вибору параметрів аналізованої системи автоматичного регулювання визначимо її реакцію на ступінчасте вхідне діяння  $x(p) = \frac{1}{p}$ . Для цього виконаємо додаткові перетворення, пов'язані з отриманням  $Z$ -перетворення полінома чисельника аналітичного виразу, що визначає зв'язок між вхідним і вихідним сигналами системи. Потім, підставивши в поліноми чисельника і знаменника умови процесу кінцевої тривалості і виконавши перетворення, отримаємо вираз для вихідного сигналу системи

$$e^*(z) = \frac{z^2 + z \cdot \left( \frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}} - 1 \right)}{z^2 - z}. \quad (2.33)$$

Значень перехідного процесу  $e[nT]$  системи можуть бути отримані у вигляді коефіцієнтів при  $z^{-n}$  розкладанням в степеневий ряд функції  $e^*(z)$ :

$$e^*(z) = C_0 + C_1 \cdot z^{-1} + C_2 \cdot z^{-2} + \dots + C_n \cdot z^{-n}. \quad (2.34)$$

Коефіцієнти  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  чисельно дорівнюють значенням перехідного процесу системи в тактові моменти часу. Значення коефіцієнтів одержуємо шляхом ділення полінома чисельника функції  $e^*(z)$  на поліном знаменника.

Початкове і кінцеве значення перехідного процесу в системі можна отримати на підставі відповідних теорем  $Z$ -перетворення:

$$\lim_{n \rightarrow 0} e[nT] = \lim_{Z \rightarrow \infty} e^*(Z); \quad (2.35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[nT] = \lim_{Z \rightarrow 1} (Z - 1) \cdot e^*(Z). \quad (2.36)$$

## 2.2 Попереднє завдання

2.2.1 Намалювати структурну схему замкнутої імпульсної системи регулювання згідно рисунку 2.1.

2.2.2. Користуючись умовою стійкості досліджуваної системи, обчислити критичну величину коефіцієнта підсилення  $K$ , враховуючи, що період дискретності імпульсного елемента  $T = 2,5 \cdot 10^{-3}$  с, а  $\gamma = 0,1$ .

2.2.3 Обчислити величину коефіцієнта підсилення  $K$ , необхідну для реалізації процесу кінцевої тривалості.

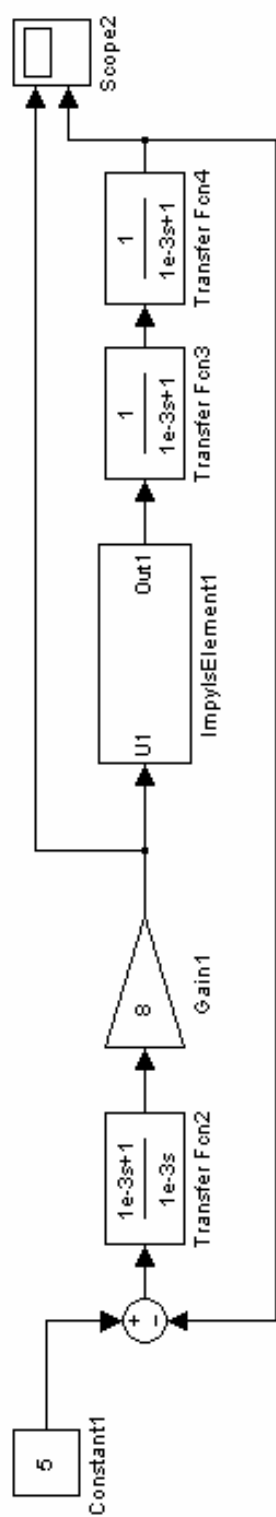
2.2.4 Виконати розрахунок перехідного процесу в досліджуваній системі, користуючись виразом для  $e^*(z)$  з урахуванням умов ПКТ.

## 2.3 Робоче завдання

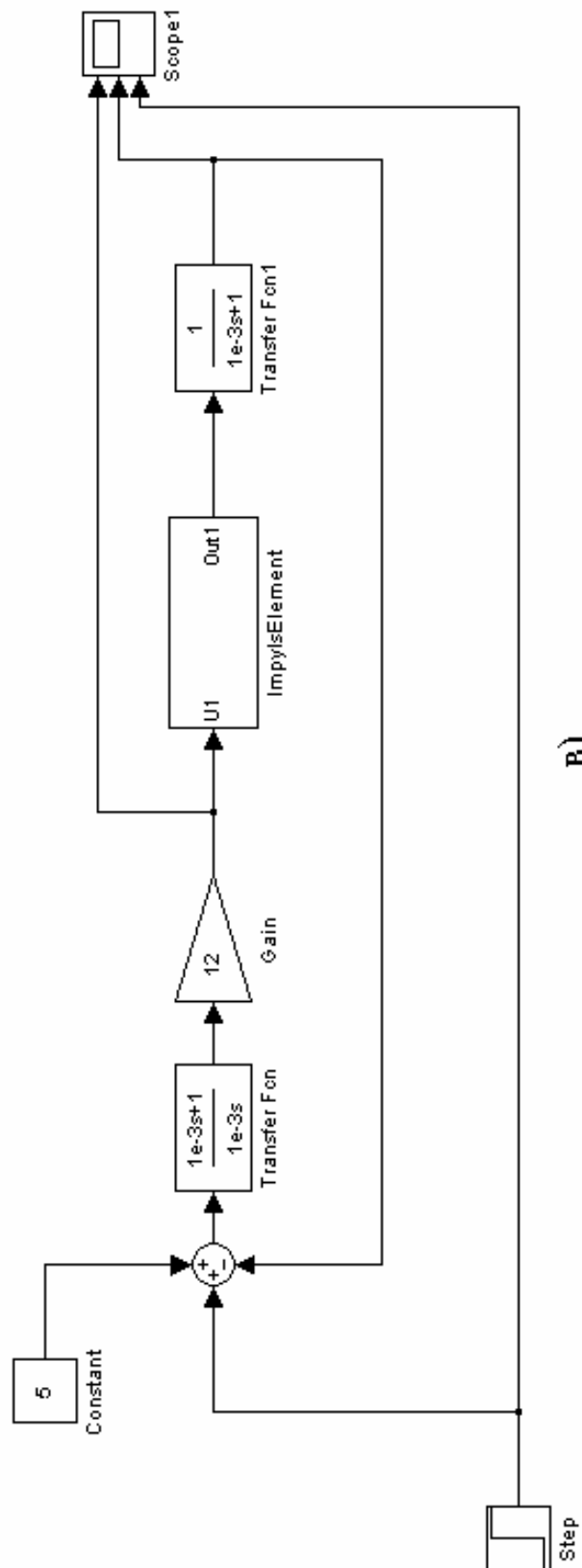
2.3.2 Зібрати на лабораторному стенді досліджувану систему згідно структурній схемі і заданим параметрам передавальних функцій динамічних ланок приведеної неперервної частини.

2.3.3 Визначити величину коефіцієнта передачі  $K$ , який відповідає виникненню в системі субгармонічних коливань для  $W(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$ .

2.3.4 Вивчити характер коливань в нестійкій імпульсній системі автоматичного регулювання. Заосцилографувати автоколивання.



a)



b)

Рисунок 2.4 – Панель дослідження динаміки імпульсної САР

2.3.5 Реалізувати в досліджуваній системі (рис. 2.4, в) умови ПКТ. Заосцилографувати перехідний процес при східчастому вхідному діянні.

## **2.4 Виконання робочого завдання**

2.4.1 Панель стенду для дослідження імпульсної САР наведена на рисунку 2.4.

2.4.2 Контроль форми сигналів і вимірювання їх параметрів в даній роботі здійснюється за допомогою осцилографа Scope 1, та Scope 2.

2.4.3 Змінюючи в елементі Gain (рис.6.4,а) величину коефіцієнта передачі  $K$ , зафіксувати момент виникнення в системі субгармонічних коливань який для  $W(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$ .

2.4.3 Для дослідження ПКТ необхідно заздалегідь встановити розрахункове значення величини  $K$ . Вхідну дію  $1(t)$  формує елемент Step.

## **2.5 Обробка результатів досліджень**

2.5.1 Порівняти розрахункову і експериментальну величини коефіцієнта підсилення  $K$ , який відповідає границі стійкості.

2.5.2 Обчислити відношення частоти автоколивань і частоти модуляції імпульсного елементу.

2.5.3 Порівняти розрахунковий і експериментальний перехідні процеси при вхідному діянні  $1(t)$ .

2.5.4 Визначити число тактів перехідного процесу і порівняти з порядком характеристичного рівняння.

### **3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3**

## **ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ**

### **3.1 Поняття про нелінійні системи і методи їх дослідження**

У попередніх лабораторних роботах досліджувалися лінійні системи автоматичного регулювання, які описуються лінійними диференціальними рівняннями. У цих рівняннях залежні змінні і їх похідні зустрічаються лише в першому ступені і відсутні взаємні добутки змінних і їх добутки з похідними. На практиці строго лінійних систем не існує, оскільки характеристики більшості їх елементів (наприклад, підсилювачів, виконавчих двигунів, вимірювальних елементів і ін.) лінійні лише на певній ділянці. Точні диференціальні рівняння систем автоматичного регулювання є нелінійними. Дослідження нелінійних диференціальних рівнянь є складним завданням, тому в тих випадках, коли заміна нелінійних характеристик лінійними не приводить до втрати якісних особливостей і помітної зміни кількісних оцінок системи, удаються до їх лінеаризації. Лінійна теорія автоматичного регулювання по суті використовується для дослідження нелінійних систем, що описуються лінеаризованими рівняннями. Проте в тих випадках, коли потрібна висока точність аналізу динамічних процесів в системах з широким діапазоном зміни керуючої дії, лінійна теорія може дати велику кількісну погрішність. Крім того, зустрічаються такі нелінійні елементи, звані істотно нелінійними, для яких не допускається заміна характеристик лінійними, оскільки при такій заміні спотворюється не тільки кількісна оцінка, але змінюється і якість динамічних процесів.

Нелінійною системою регулювання називається система, в яку входить один або декілька нелінійних елементів. Нелінійний елемент характеризується непропорційною залежністю між вхідними і вихідними сигналами. Статичну характеристику нелінійного елемента не можна представити однією прямою лінією.

Нелінійності діляться на природні і штучні. Природні нелінійності виникають в системі як результат її конструктивних особливостей (наприклад, люфт, мертвий хід, нелінійність, пов'язана з насиченням і ін.). Штучні нелінійності вводяться в систему з метою досягнення певних властивостей. Найбільш поширеними нелінійними системами є релейні системи. Статичні характеристики найбільш поширених нелінійних

елементів приведені в таблиці А.3 Додатку А. Перша з них належить ідеальній релейній ланці. Статична характеристика такої ланки описується наступною системою рівнянь:

$$y = \begin{cases} y_e, & \text{при } x > 0; \\ -y_e, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Друга характеристика належить ланці типу «обмеження» (або «насичення»). Подібними характеристиками володіють всі реальні підсилювачі (електронні, магнітні, пневматичні, гідравлічні), обмежені за вихідним параметром при великих вхідних сигналах. Математично статична характеристика даної ланки описується таким чином:

$$y = \begin{cases} kx, & \text{при } |x| \leq x_a; \\ y_e \operatorname{sign} x, & \text{при } |x| > x_a. \end{cases} \quad (3.2)$$

Перший і другий елементи відносяться до нелінійних ланок з однозначними статичними характеристиками.

Третя характеристика належить двопозиційному релейному елементу. Даною характеристикою володіють охоплені позитивним зворотним зв'язком підсилювачі з характеристикою типу обмеження. Дана характеристика декілька ідеалізується. У реальній ланці зазвичай величина вхідного сигналу, при якій спостерігається стрибок вихідної величини  $y$ , буває різною для перемикачів в прямому і в зворотному напрямках. Математично статична характеристика даної ланки описується наступною системою рівнянь:

$$y = \begin{cases} y_e, & \text{при } x_a \leq x \leq \infty; \\ -y_e, & \text{при } -\infty < x \leq x_a. \end{cases} \quad (3.3)$$

Остання характеристика таблиці належить ланці з гістерезисною петлею. Даною характеристикою, наприклад, володіють механічні системи із зазором. Аналітично приведена статична характеристика описується таким чином:

$$y = \begin{cases} kx, & \text{при } x - x_0 \leq \infty; \\ kx, & \text{при } -x + x_0 \leq -x_a; \\ y_e \operatorname{sign} x, & \text{при } |x| > x_a. \end{cases} \quad (3.4)$$

Елементи, які мають третю і четверту характеристики таблиці, відносяться до нелінійних ланок з двозначними статичними характеристиками.

Щоб з'ясувати дію і особливості одно- і двозначного релейних елементів, подамо на їх вхід сигнал синусоїдальної форми  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ .

При подачі на вхід нелінійної ланки з ідеальною релейною характеристикою гармонійного сигналу на її виході збуджуються прямокутні знакозмінні коливання з амплітудою  $y_e$  і частотою вхідного сигналу  $x(t)$ . Перемикання ідеального релейного елементу відбувається в моменти переходу вхідного сигналу через нуль, тобто фазовий зсув між вхідними і вихідними сигналами дорівнює нулю (рис. 3.1).

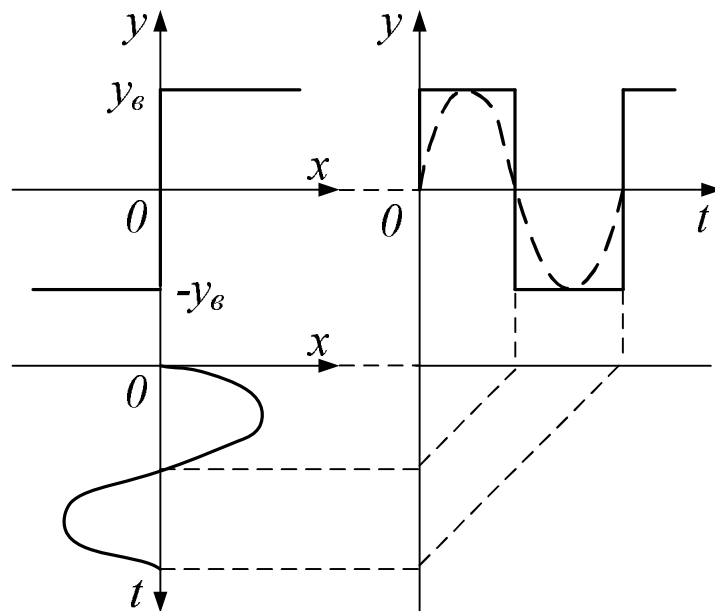


Рисунок 3.1 – Перемикання одноопераційного ідеального релейного елементу

При подачі синусоїдального сигналу на вхід двоопераційного релейного елементу (рис. 3.2) перемикання в схемі мають складніший характер. При збільшенні вхідного сигналу на інтервалі від 0 до  $t_1$ , перемикання релейного елементу відбувається в точці 1. Робоча точка по статичній характеристиці переміщається із стану 1 в стан 2.

Подальше збільшення вхідного сигналу на тимчасовому інтервалі  $t_1 - t_2$  не супроводжується перемиканнями релейного елементу.

На інтервалі  $t_2 - t_3$  відбувається зміна знаку вхідного сигналу, що не викликає зміни стану релейного елементу.

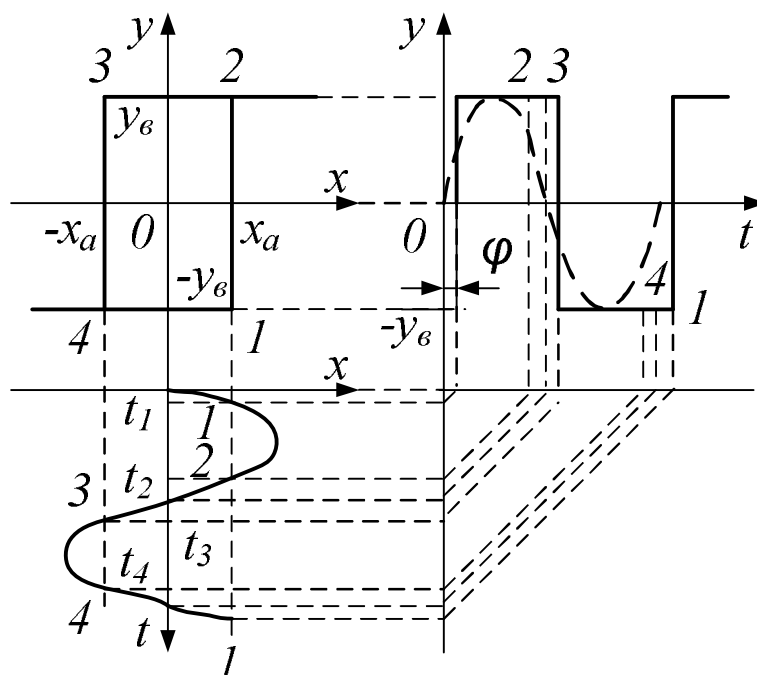


Рисунок 3.2 – Перемикання двоопераційного релейного елементу

Чергове перемикання відбувається в моменти часу  $t_3$  і  $t_4$ , внаслідок чого цикл формування вихідного сигналу  $y(t)$  закінчується. Аналіз діаграми перемикань двопозиційного релейного елементу показує, що в результаті наявності петлі гістерезису фазовий зсув  $\varphi$  між вхідним  $x(t)$  і вихідним  $y(t)$  сигналами відмінний від нуля. Величина фазового зсуву залежить від ширини петлі гістерезису і амплітуди вхідного сигналу.

Як видно з розгляду роботи релейних елементів, параметри систем, що містять нелінійні ланки, залежать від величини їх вхідних сигналів. Тому до нелінійних систем непридатні методи дослідження лінійних систем. Так, в даних системах не діє принцип суперпозиції, оскільки реакція нелінійної системи не дорівнює сумі діянь на окремі діяння. До нелінійних систем непридатна властивість комутативності, тобто в системі не можна міняти місцями між собою нелінійні елементи, а також нелінійні і лінійні елементи.

Для дослідження нелінійних систем не можна застосовувати перетворення Лапласа і отримані на його основі передавальні функції, як це робилося в лінійних системах.



З розглянутих релейних елементів (рис. 3.1, 3.2) виходить, що в нелінійній системі можливі стійкі коливання певної амплітуди і частоти. Режим автоколивань часто не тільки допустимий, але і бажаний.

Стійкість нелінійних систем визначається не тільки структурою і параметрами системи (як в лінійних системах), але і залежить від початкових відхилень від початкової рівноваги. Тому поняття стійкості для нелінійних систем значно складніше, ніж для лінійних. Якщо лінійні системи мають єдиний стан рівноваги, який може бути стійким або нестійким, то в нелінійній системі їх може бути декілька.

Як вже наголошувалося, в нелінійній системі можуть існувати стійкі автоколивання, обумовлені принципом її роботи. Таким чином, в нелінійних системах розрізняють два поняття стійкості: стійкість стану рівноваги і стійкість автоколивань. Обидва ці стани залежать не тільки від структури системи і її параметрів, але і від початкових відхилень системи відносно стану рівноваги. Якщо початкові відхилення  $x(t)$  не перевищують деякої величини  $a$  і процес затухає (крива 1 на рис. 3.3), то стан  $x = 0$  стійкий. Якщо початкове значення  $x(t)$  перевищує  $a$  і процес розходиться (крива 2), то стан  $x = 0$  нестійкий.

Параметр  $a$  є свого роду границею стійкості за початковим відхиленням. Залежно від його величини розрізняють:

- стійкість «в малому». Система стійка «в малому», якщо вона стійка тільки при малих початкових відхиленнях (крива 1);
- стійкість «у великому». Система стійка «у великому», якщо вона стійка в кінцево великих початкових відхиленнях (крива 3);
- стійкість «в цілому». Система стійка «в цілому», якщо вона стійка при будь-яких необмежено великих початкових відхиленнях.

Як видно з рисунку 3.3, стан рівноваги нелінійної системи може бути стійким «в малому» і нестійким «у великому» (криві 1; 2).

Стійка система після зняття зовнішньої дії повертається в початковий стан. Така стійкість називається асимптотичною (стійкістю в точці). Крім того, в нелінійних системах може бути стійкість в деякій області (неасимптотична стійкість), що характеризується поверненням системи в певну область після зняття дії.

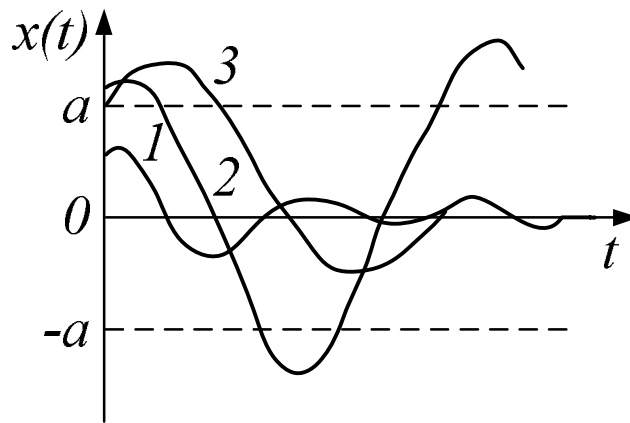


Рисунок 3.3 – Види стійкості нелінійної системи

Вирішення задачі про абсолютну стійкість системи з однією однозначною нелінійною ланкою (тобто стійкості при будь-якій формі нелінійності із слабким обмеженням) може бути виконане за частотним методом В.М. Попова.

Нехай система (рис. 3.4) містить однозначну нелінійність

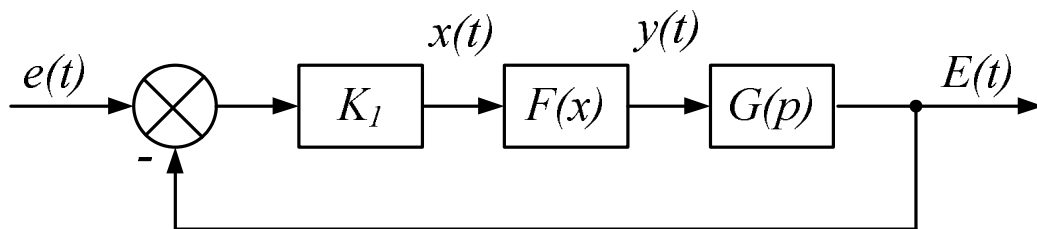


Рисунок 3.4 – Структурна схема нелінійної САР

$y = F(x)$ , яка має будь-яку конфігурацію, що не виходить із заданого кута  $\arctg K$  (рис. 3.5).

Передавальна функція лінійної частини системи

$$G(p) = \frac{N(p)}{M(p)}, \quad (3.5)$$

де  $N(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n+1} + \dots + a_n$ ;

$M(p) = b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_m$ ; причому  $m > n$ .

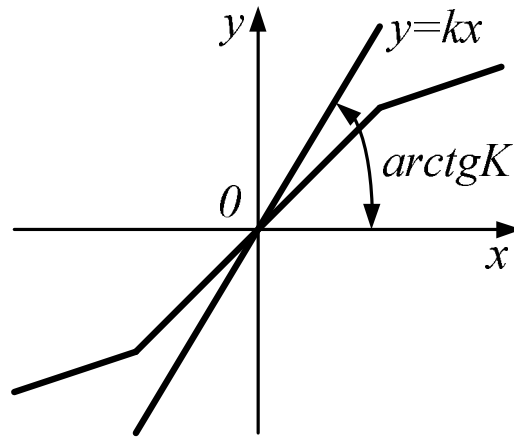


Рисунок 3.5 – Границя стійкості нелінійної САР

Корені характеристичного рівняння  $M(p)=0$  лежать в лівій напівплощині або ж окрім них є ще не більше двох нульових коренів. Даним вимогам відповідає лінійна частина, складена з лінійних ланок, вказаних в таблиці А.1 Додатку А.

$$G(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^2 \cdot (T_3 p + 1)}. \quad (3.6)$$

Представимо комплексну передавальну функцію лінійної частини в алгебраїчній формі:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= U(j\omega) + jV(j\omega) = \\ &= \frac{1 - \omega^2 \cdot T_1 \cdot (T_1 + 2 \cdot T_3)}{(1 + \omega^2 \cdot T_1^2)^2 \cdot (1 + \omega^2 \cdot T_3^2)} - j\omega \frac{2 \cdot T_1 - T_3 \cdot (1 - \omega^2 \cdot T_1^2)}{(1 + \omega^2 \cdot T_1^2)^2 \cdot (1 + \omega^2 \cdot T_3^2)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Спочатку вважатимемо, що замість нелінійного елемента включений лінійний елемент з коефіцієнтом підсилення  $K_0$ . В цьому випадку комплексна передавальна функція розімкненої системи прийме наступний вигляд:

$$W_p(j\omega) = K_0 \cdot K_1 \cdot [U(\omega) + jV(\omega)]. \quad (3.8)$$

Згідно критерію стійкості Найквіста для стійкості замкнутої системи необхідно, щоб годограф а.ф.х. передавальної функції  $W_p(j\omega)$  не охоплював точку  $(-1; j0)$ . Цей критерій можна сформулювати по-іншому: для стійкості замкнутої системи необхідно, щоб годограф а.ф.х. передавальної функції

$$G(j\omega) = K_1 \cdot [U(\omega) + jV(\omega)] \quad (3.9)$$

не охоплював точку з координатами  $\left(-\frac{1}{K_0}; j0\right)$ .

Введемо тепер перетворену комплексну передавальну функцію

$$G^*(j\omega) = K_1 \cdot [U^*(\omega) + jV^*(\omega)], \quad (3.10)$$

де  $U^*(\omega) = U(\omega)$ ;  $V^*(\omega) = \omega \cdot V(\omega)$ .

Для вибраної передавальної функції лінійної частини системи отримаємо

$$\begin{aligned} G^*(j\omega) = & K_1 \cdot \frac{1 - \omega^2 \cdot T_1 \cdot (T_1 + 2 \cdot T_3)}{(1 + \omega^2 \cdot T_1^2)^2 \cdot (1 + \omega^2 \cdot T_3^2)} - \\ & - jK_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{2 \cdot T_1 - T_3 \cdot (1 - \omega^2 \cdot T_1^2)}{(1 + \omega^2 \cdot T_1^2)^2 \cdot (1 + \omega^2 \cdot T_3^2)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

На рисунку 3.6 представлено сімейство годографів досліджуваної системи для різних величин  $K_1$ .

Згідно критерію стійкості В.М. Попова система володітиме абсолютною стійкістю тоді, коли годограф а.ф.х. лежить правіше від прямої, проведеної через точку  $\left(-\frac{1}{K_0}; j0\right)$ .

Широке застосування для дослідження нелінійних систем автоматичного управління високого порядку ( $n > 2$ ) отримав наближений метод гармонійної лінеаризації (або гармонійного балансу).

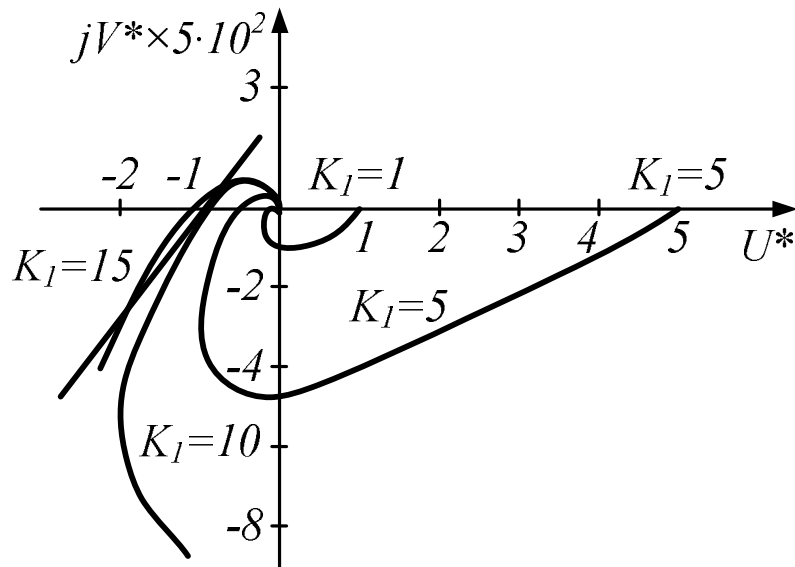


Рисунок 3.6 – Сімейство годографів

Суть методу полягає в заміні нелінійної ланки лінійною, що здійснює такі ж перетворення гармонійних коливань, як і нелінійна. Така заміна дозволяє досліджувати нелінійні системи частотними методами, що застосовуються в лінійних системах, тобто проводити аналіз стійкості, виявляти наявність автоколивань з визначенням їх амплітуди і частоти, вирішувати задачу корекції.

Для пояснення принципу гармонійної лінеаризації скористаємося структурною схемою нелінійної системи автоматичного регулювання, зображеної на рисунку 3.4.

Припустимо, що в даній системі при  $e(t) = 0$  на виході нелінійної ланки  $F(x)$  існують симетричні полігармонічні коливання

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}, \quad (3.12)$$

де  $y_i$  і  $\varphi_i$  – амплітуда і фаза  $i$ -й гармонійної складової.

Вихідний сигнал нелінійного елементу, проходячи через лінійну частину  $W(p)$ , фільтрується в такому ступені, що в сигналі  $E(t)$  на виході лінійної частини можна нехтувати всіма гармоніками, починаючи з  $i = 2$ .

У такому разі вихідний сигнал лінійної частини пропорційний першій гармоніці вихідного сигналу нелінійної ланки

$$E(t) = A_1 \cdot y_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)}, \quad (3.13)$$

де  $A_1$  – модуль коефіцієнта передачі лінійній частині на частоті першої гармоніки.

Дане припущення носить назву гіпотези фільтру і є необхідною умовою гармонічної лінеаризації. З нього виходить, що чим більше різниця порядків поліномів чисельника і знаменника  $W(p)$ , тим менше розбіжність між нелінійною і лінеаризованою системами.

Відомо, що гармонійне коливання  $E(t)$  можна представити в наступному вигляді:

$$E(t) = q' \cdot \sin \omega t + b' \cdot \cos \omega t, \quad (3.14)$$

де  $q'$  і  $b'$  – коефіцієнти першої гармоніки ряду Фур'є:

$$q' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t; \quad (3.15)$$

$$b' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t. \quad (3.16)$$

Тоді комплексне зображення вхідної  $x(t)$  і вихідної  $y(t)$  величин нелінійної ланки мають вигляд (для їх першої гармоніки)

$$x(t) = A \cdot e^{j\omega t}; \quad (3.17)$$

$$y(t) = q' \cdot e^{j\omega t} + jb' \cdot e^{j\omega t}. \quad (3.18)$$

Відношення комплексних зображень першої гармоніки вихідного сигналу до вхідного називається еквівалентним комплексним коефіцієнтом підсилення нелінійного елементу

$$K_{н.е} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{q' \cdot e^{j\omega t} + jb' \cdot e^{j\omega t}}{A \cdot e^{j\omega t}} = q(A) + jb(A), \quad (3.19)$$

де  $q(A) = \frac{q'}{A}$ ,  $b(A) = \frac{b'}{A}$  – коефіцієнти гармонійної лінеаризації.

У показовій формі

$$K_{н.е} = N(A) \cdot e^{j\varphi(A)}, \quad (3.20)$$

де  $N(A) = \sqrt{q^2(A) + b^2(A)}$  – модуль еквівалентного коефіцієнта підсилення;

$$\varphi(A) = \arctg \frac{b(A)}{q(A)} \text{ – аргумент.}$$

З виразів для  $N(A)$  і  $\varphi(A)$  витікає, що модуль і аргумент еквівалентного комплексного коефіцієнта підсилення залежать від амплітуди  $A$  вхідного коливання і не залежать від частоти.

Методику визначення  $K_{н.е.}$  розглянемо на прикладі статичної характеристики ідеального релейного елементу (рисунок 3.5).

При подачі на його вхід сигналу  $x(A) = A \cdot \sin \omega t$  на виході отримаємо послідовність прямокутних імпульсів. Внаслідок того, що вихідний сигнал релейного елементу є непарною функцією (симетрія II-роду), то коефіцієнт ряду Фур'є  $b' = 0$ , а коефіцієнт  $q'$  обчислимо як

$$q' = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} y_{\epsilon} \cdot \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \cdot y_{\epsilon} \cdot (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot y_{\epsilon}. \quad (3.21)$$

Еквівалентний коефіцієнт підсилення ідеального релейного елементу дорівнює

$$K_{н.е} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y \cdot b}{A}. \quad (3.22)$$

В таблиці А.3 Додатку А приведені формули для еквівалентних коефіцієнтів підсилення нелінійних ланок, що розглядаються в даній лабораторній роботі.

Для випадку стійкої лінійної частини системи коливання в системі виникають завдяки нелінійному елементу. Тому згідно критерію Найквіста для граничного випадку стійкості отримаємо

$$K_{н.е} \cdot A_n(f_{кр}) = 1. \quad (3.23)$$

Критичне значення частоти відповідає фазовому зсуву. Звідси умови автоколивального процесу будуть характеризуватися двома станами:

$$\begin{cases} K_{н.е.} \cdot A_n(f_{кр}) = 1; \\ \varphi_n(f_{кр}) + \varphi_{н.е.} = -\pi. \end{cases} \quad (3.24)$$

Перший стан системи називають рівнянням балансу амплітуд, а друге – рівнянням балансу фаз. Рівняння гармонійного балансу дозволяє отримати параметри автоколивального режиму, до яких відносяться частота коливань  $f_{кр}$ , еквівалентний коефіцієнт підсилення нелінійного елементу  $K_{н.е.}$  і амплітуда вхідного сигналу  $x(t)$ .

### 3.2 Попереднє завдання

3.2.1 Намалювати структурну схему замкнутої нелінійної системи регулювання згідно рисунок 3.4.

3.2.2 В якості лінійної частини системи  $W(p)$  застосувати послідовне з'єднання ланок  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$ .



3.2.3 Обчислити значення критичної частоти автоколивань в системі за формулою

$$f_{кр} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 \cdot T_2 \cdot T_3}}. \quad (3.25)$$

Величини постійних часу, що входять в наведену формулу, визначити на підставі таблиці А.1 Додатку А.

3.2.4 Обчислити коефіцієнт передачі лінійної частини системи на критичній частоті

$$A_{л}(f_{кр}) = \frac{1}{2 \cdot \left( \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_1}{T_3} \right) + 4}. \quad (3.26)$$

3.2.5 За годографом (рис. 3.5) визначити критичні значення коефіцієнта підсилення  $K_1$ , що відповідають границі стійкості системи.

3.2.6 Застосувавши умови стійкості, отримані на підставі методу гармонійної лінеаризації, обчислити величину коефіцієнта передачі ідеального релейного елемента на критичній частоті

$$K_{н.е} = \frac{1}{A_{л}(f_{кр})}. \quad (3.27)$$

3.2.7 Обчислити амплітуду вхідного сигналу релейного елемента за формулою

$$A = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y_{\epsilon}}{K_{н.е.}}, \quad (3.28)$$

в якій  $y_{\epsilon}$  визначити зі статичної характеристики.

### 3.3 Робоче завдання

3.3.1 Зняти статичні характеристики нелінійних елементів згідно таблиці А.3 Додатку А.

3.3.2 Дослідити стійкість замкнутої нелінійної системи автоматичного регулювання за критерієм В. М. Попова.

3.3.3 Дослідити автоколивання в нелінійній системі з релейним елементом.

3.3.4 Панель стенду для дослідження нелінійної системи наведена на рисунку 3.7.

### **3.4 Виконання робочого завдання**

3.4.1 Для зняття статичних характеристик нелінійну ланку вилучити із замкнутої САР з подальшою подачею на її вхід вихідного сигналу елемента Constant. Особливо ретельно необхідно визначити величини  $x_a$  і  $y_v$ .

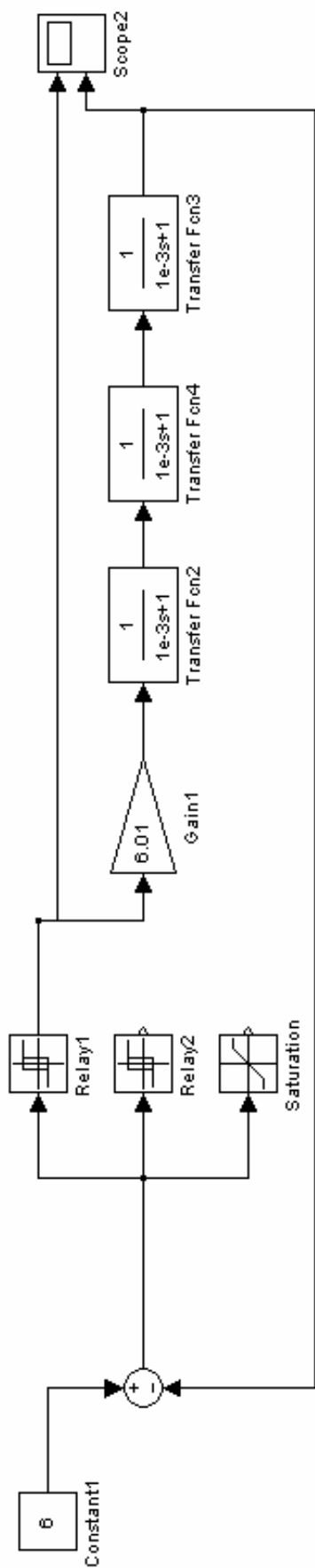
3.4.2 Для дослідження стійкості за критерієм В. М. Попова зібрати замкнуту нелінійну систему автоматичного регулювання згідно рисунку 3.4. В якості нелінійного елемента  $F(x)$  застосувати ланки заданих згідно таблиці А.3 Додатку А. В якості елемента з передавальною функцією  $K_1$  застосувати ланку Gain. Зміною величини  $K_1$  за допомогою елемента Gain отримати в системі автоколивання і виміряти частоту автоколивань.

### **3.5 Обробка результатів досліджень**

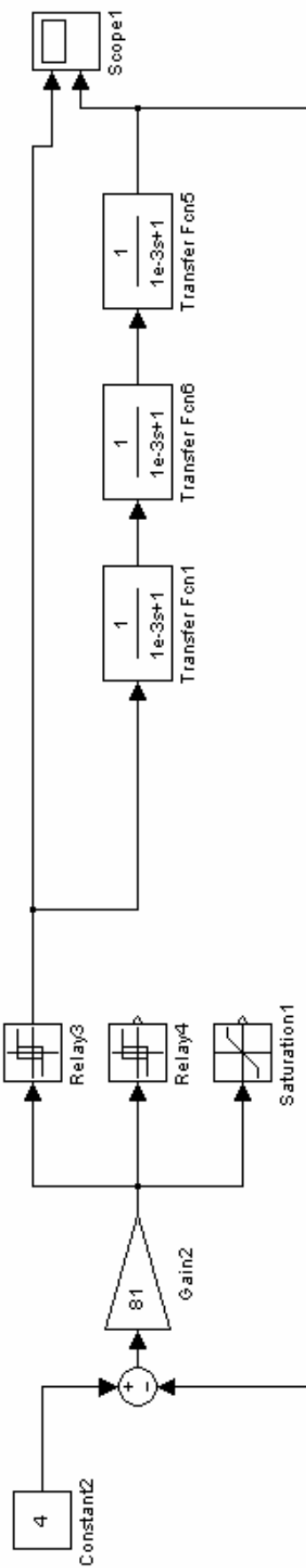
3.5.1 Побудувати статичні характеристики нелінійних ланок.

3.5.2 Порівняти експериментально отримане значення  $K_1$  з його значенням по годографу В.М. Попова.

3.5.3 Порівняти параметри автоколивань з результатами розрахунку.



a)



b)

Рисунок 3.7 – Панель для дослідження нелінійної системи

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Теория автоматического управления : у 2 ч. / [А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Локин и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. I. – 367 с. – (Теория линейных систем автоматического регулирования).
2. Теория автоматического управления : у 2 ч. / [А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Локин и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. II. – 504 с. – (Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления).
3. Теория автоматического управления : Нелинейные системы управления при случайных воздействиях / [А. В. Нетушил, А. В. Балтрушевич, В. В. Бурляев и др.] ; под ред. А. В. Нетушила. – М. : Высшая школа, 1983. – 432 с.
4. Джури Э. В. Импульсные системы автоматического регулирования / Э. В. Джури. – М. : Госфизматиздат, 1963. – 455 с.

# Додаток А

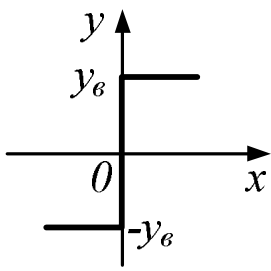
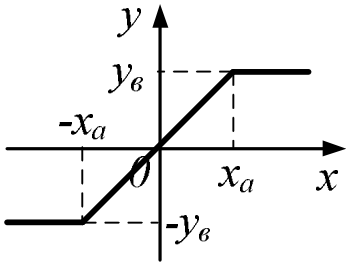
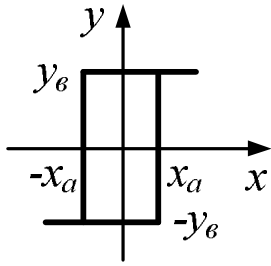
Таблиця А.1 – Передавальні функції досліджуваних ланок

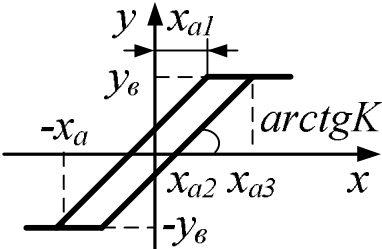
Номер варіанта	Передавальна функція ланок	Параметри (варіанти)
1	$H_1(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$	$T_1 =$ : 1) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $2 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $3 \cdot 10^{-3}$ с.
2	$H_2(p) = \frac{1}{T_2 p + 1}$	$T_2 =$ : 1) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $3 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $2 \cdot 10^{-3}$ с.
3	$H_3(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}$	$T_3 =$ : 1) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $3 \cdot 10^{-3}$ с.
4	$H_4(p) = \frac{1}{T_4^2 p^2 + 2\xi T_4 p + 1}$	$T_4 =$ : 1) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $2 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $3 \cdot 10^{-3}$ с; $\xi = 0,5$
5	$H_5(p) = \frac{T_5 p}{T_5^2 p^2 + 2\xi T_5 p + 1}$	$T_5 =$ : 1) $1 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $2 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $3 \cdot 10^{-3}$ с; $\xi = 0,05$

Таблиця А.2 –  $Z$ -перетворення найбільш розповсюджених функцій

$W(p)$	$W^*(z, \varepsilon)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z \cdot e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T}}{z - e^{-a \cdot T}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$zT \cdot e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T} \cdot \left[ \frac{\varepsilon}{z - e^{-a \cdot T}} + \frac{e^{-a \cdot T}}{(z - e^{-a \cdot T})^2} \right]$
$\frac{1}{(p+a) \cdot p}$	$\frac{z}{a} \cdot \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T}}{z - e^{-a \cdot T}} \right]$
$\frac{p+c}{(p+a) \cdot (p+b)}$	$\frac{z}{b-a} \cdot \left[ \frac{(c-a) \cdot e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T}}{z - e^{-a \cdot T}} - \frac{(c-b) \cdot e^{-\varepsilon \cdot b \cdot T}}{z - e^{-b \cdot T}} \right]$
$\frac{1}{(p+a)^2 + \beta^2}$	$z \cdot \frac{e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T}}{\beta} \cdot \frac{z \sin \varepsilon \beta T + e^{-a \cdot T} \sin[(1-\varepsilon)\beta T]}{z^2 - 2ze^{-a \cdot T} \cos \beta T + e^{-2 \cdot a \cdot T}}$
$\frac{p+c}{(p+a)^2 + \beta^2}$	$z \cdot e^{-\varepsilon \cdot a \cdot T} \cdot \sec \varphi \frac{z \cos(\varepsilon \beta T + \varphi) - e^{-a \cdot T} \cos[(1-\varepsilon)\beta T]}{z^2 - 2ze^{-a \cdot T} \cos \beta T + e^{-2 \cdot a \cdot T}},$ $tg \varphi = \frac{a-c}{\beta}$

Таблиця А.3 – Статичні характеристики нелінійного елемента

Номер варіанта	Статичні характеристики	Параметри
1	 $K_{н.е.} = \frac{4 \cdot y_{\epsilon}}{\pi \cdot A}$	$\pm y_{\epsilon}=10$
2	 $K_{н.е.} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y_{\epsilon}}{x_a} \cdot \left( \frac{x_a}{2} - \frac{\sin 2x_a}{4} + \frac{x_a \cos x_a}{A} \right)$	$\pm y_{\epsilon}=10$ $\pm x_a=1$
3	 $q' = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y_{\epsilon}}{x_a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x_a^2}{A^2}};$ $A \geq x_a; b' = -\frac{4 \cdot y_{\epsilon} \cdot x_a}{\pi \cdot A^2}$	$\pm y_{\epsilon}=10$ $\pm x_a=1$

4	 $q' = \frac{K}{\pi} \cdot (\varphi_2 + \frac{\sin 2\varphi_2}{2} +$ $+ \varphi_1 + \frac{\sin 2\varphi_1}{2});$ $b' = -\frac{K}{\pi} \cdot (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1)$ $\varphi_{2,1} = \arcsin \frac{y_6 \pm x_{a2} \cdot K}{A \cdot K}$	$\pm y_6 = 10$ $\pm x_a = 1$
---	--	------------------------------



*Навчальне видання*

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
для виконання лабораторних робіт  
з навчальної дисципліни

**«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

II частина

**Імпульсні та нелінійні системи автоматичного регулювання**

*(для студентів усіх форм навчання і слухачів другої вищої освіти  
за спеціальністю*

*141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Укладачі: **ЩЕРБАК** Яків Васильович,  
**ІВАКІНА** Катерина Яківна

Відповідальний за випуск *Ю. П. Бархаєв*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2017, поз. 535М

---

Підп. до друку 26.06.2017

Формат 60×84/16

Друк на ризографі

Ум. друк. арк. 2,9

Зам. №

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002  
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.